

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

R 302

Onderzoek naar de bezetting van de verbrandingsmotor-
proefstanden te Wpc Tilburg.

door

[Staf van de Rekenafdeling]



[1955]

Onderzoek naar de bezetting van de verbrandingsmotor-
proefstanden te Wpc Tilburg.

1. Inleiding.

De Heer Ir D.N. Klaren van Wpc Tilburg legde ons het volgende probleem voor:

Momenteel worden in Wpc Tilburg een aantal proefstanden voor Dieselmotoren gebouwd. Voor de koeling en de remming van de op deze proefstanden aanwezige motoren is een koelwaterinstallatie nodig. Ter bepaling van de capaciteit van de te gebruiken filterinstallatie is het gewenst inzicht te hebben in de mate van waarschijnlijkheid, dat bepaalde combinaties van grote vermogens tegelijkertijd in de vijf proefstanden afgegeven worden. Met name werd gevraagd naar het verband tussen de grootte van een bepaald afgegeven totaal vermogen en de kans, dat dit inderdaad afgegeven wordt.

Daartoe werden ons de gegevens verstrekt, welke in tabel I samengevat zijn.

Tabel I. Vermogen van een motor en het aantal eenheden.

Vermogen in PK = N	Aantal eenheden
0	2378
80	334
200	356
300	258
450	332
700	192
935	150
Totaal 4000	

De eenheden in de tabel aangegeven, berekenden de Heren Klaren en Veerman uit het aantal motoren van elke, bij de N.S. voorkomende soort en uit de frequentie van de revisie. Hierbij komt een eenheid overeen met een periode, gedurende welke een bepaalde motor een der aangegeven vermogens afgeeft; deze periode bedraagt steeds 3 uur.

2. Theoretische oplossing van het probleem.

De relatieve kansen voor ieder vermogen konden eenvoudig berekend worden door deling van het aantal eenheden per vermogen door het totaal aantal eenheden. Hieronder vindt men een tabel, waarin de relatieve kansen a_j ($j = 1, 2, \dots, 7$) in volgorde van grootte zijn samengebracht met de vermogens N_j ($j = 1, 2, \dots, 7$).

Tabel II. Vermogen van een motor met de bijbehorende relatieve kans.

j	$10^{-1} N_j$	PK	$10 \cdot a_j$
1		0	5,945
2		20	0,89
3		8	0,835
4		45	0,83
5		30	0,645
6		70	0,48
7		93	0,375

Hierbij werd ter ruimtebesparing in de ponskaarten het vermogen N_7 , - dat als 935 PK gegeven was - met toestemming van de Heer Klaren tot 930 PK afgerond.

In de eerste plaats was het nodig vast te stellen, hoeveel verschillende totale vermogens er in principe mogelijk zijn. Dit aantal is gelijk aan het aantal herhalingscombinaties 5 aan 5 uit 7 elementen en volgt uit de formule¹⁾

$$\bar{C}_m^n = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!},$$

waarbij in ons geval: $m = 7$ en $n = 5$, zodat $\bar{C}_m^n = 462$.

In ons probleem kunnen "verschillende" totale vermogens numeriek gelijk aan elkaar zijn. Zo wordt een totaal vermogen van 400 PK afgegeven, zowel bij een bezetting van 2 motoren van 200 en 3 van 0 PK, als bij 5 motoren van 80 PK. Voor de waarschijnlijkheidsberekening dienen we echter dergelijke vermogens toch als verschillend te beschouwen. De uiteindelijke kans, dat een bepaald vermogen afgegeven wordt, is in zulk een geval gelijk aan de som van de kansen der verschillende vermogens, welke tot een dergelijke groep behoren.

Vervolgens werd nagegaan op welke wijze iedere totale kans berekend kan worden uit de relatieve kansen. Daarbij bleek, dat de totale kans overeenkomt met het product der relatieve kansen van de samenstellende vermogens, vermenigvuldigd met een bepaalde coëfficiënt. Deze coëfficiënten zijn dezelfde als die van de termen, optredende bij de ontwikkeling van de macht van een veelterm, waarvoor de volgende formule geldt²⁾:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

Hierbij moeten aan $k_1, k_2, \dots, k_m$ alle niet-negatieve waarden toegekend worden, welke voldoen aan $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Het symbool n stelt daarbij weer het aantal elementen per groep voor, m het aantal verschillende elementen en $a_1, a_2, \dots, a_m$ de relatieve kansfactoren.

Iedere term van deze ontwikkeling geeft de totale kans weer, behorende bij het totale vermogen, dat bepaald wordt door de bij de relatieve kansen behorende vermogens op te tellen. Zij bestaat uit een factor, bepaald door het product der samenstellende vijf relatieve kansen en een coëfficiënt, bepaald door de exponenten dezer kansen.

Als b.v. de vijf standen bezet zijn door 2 eenheden met vermogen N_3 en 3 met vermogen N_5 , dan wordt het totale vermogen bepaald door $2 \cdot N_3 + 3 \cdot N_5$ en de totale kans door

$$\frac{5!}{2!3!} a_3^2 \cdot a_5^3.$$

3. Numerieke berekening der totale kansen.

In verband met de omvang van het te verrichten rekenwerk werd voor de numerieke uitwerking van het probleem de hulp ingeroepen van de afdeling mechanische administratie van FD 5, welke over de nodige ponskaartenmachines, in het bijzonder de vermenigvuldigingsmachine van de I.B.M., type 602, beschikt. Vooraf werden echter alle combinaties en de daarbij behorende coëfficiënten ~~berekend~~ berekend. Daarbij werd gebruik gemaakt van onderstaande tabel III;

1) Zie b.v. F. Schuh, Nieuw Leerboek der Hogere Algebra, Zutphen (1943), blz. 5

2) F. Schuh, loc.cit., pag. 32

Tabel III. De coëfficiënten, waarmede de totale kansen bepaald worden.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	Coëfficient	Aantal combinaties.
5	0	0	0	0	0	0	1	7
4	1	0	0	0	0	0	5	42
3	2	0	0	0	0	0	10	42
3	1	1	0	0	0	0	20	105
2	2	1	0	0	0	0	30	105
2	1	1	1	0	0	0	60	140
1	1	1	1	1	0	0	120	21
Totaal								462

Kortheidshalve werd in deze tabel niet iedere combinatie met dezelfde coëfficient uitgeschreven, doch achter de verschillende coëfficiënten de aantallen combinaties met dezelfde coëfficient vermeld.

Deze aantallen werden op eenvoudige wijze bepaald uit de permutaties van de elementen van ieder geval: b.v. het eerste in de tabel genoemde geval bevat een vijf en zes nullen, welke $\frac{7!}{6!} = 7$ malen gepermuteerd kunnen worden enz.

In een uitvoerige, in dit rapport niet afgedrukte tabel, werd voor alle 462 combinaties de groepering der in tabel II genoemde indices j uitgeschreven.

Aan de hand van deze tabel werden 462 ponskaarten gemaakt, terwijl van het eerste in tabel III genoemde geval voor iedere permutatie zes extra kaarten werden geponst. Deze kaarten deden gedurende de machinebewerkingen als proefkaarten dienst. Vooraf werd n.l. de eerste tot de vijfde macht van elke relatieve kans met de hand berekend, waardoor controle op de door de vermenigvuldigingsmachine verrichte berekeningen mogelijk was.

Bij het schakelen van laatstgenoemde machine trad een moeilijkheid op in verband met het beperkt aantal selectors, welke voor het uitkiezen der zeven indices ter beschikking stonden. Deze moeilijkheid heeft de Heer Dr Ir de Pater met behulp van een kunstgreep opgelost, waarbij de index 7 niet door de cijferponsing 7, maar door een x ponsing in de betr.kolom werd aangegeven.

Bij de eerste machinegang werd in elke kaart de door de eerste index aangewezen relatieve kans - een vast bedrag, dat door middel van een schakeling van de z.g. digit-emitter via de selectors beschikbaar was - vermenigvuldigd met een en het resultaat daarvan in de kaart geponst. Bij de tweede bewerking werd het bij de voorgaande bewerking in de kaart geponste bedrag vermenigvuldigd met de, door de tweede index aangewezen, relatieve kans en zo verder, tot alle vijf indices op deze wijze aan de beurt gekomen waren.

Alvorens de met deze vijf bewerkingen verkregen resultaten te vermenigvuldigen met de bijbehorende coëfficiënten, werden nu de kaarten weer vijf maal door de machine gevoerd ter berekening van de som der vijf door de indices aangegeven vermogens.

Vervolgens werden de kaarten met behulp van de sorteermachine in volgorde van de grootte van het totale vermogen gesorteerd, waarna de kaarten nogmaals door de machine werden gevoerd ter berekening van de totale kansen. Daarbij werden deze kansen in een afzonderlijk telwerk opgeteld en deze som werd in elke kaart geponst. Daar de totale som der kansen gelijk moet zijn aan 1, werd hiermede een controle verkregen op de gehele bewerking, terwijl bovendien de aangroeiing van de kans bij iedere toename van het totale vermogen werd vastgelegd.

Tenslotte werden de totale kansen nog eens vermenigvuldigd met 4000, waardoor de kansen in het te verwachten aantal bezettingsuren werden uitgedrukt.

Het eigenlijke rekenwerk was hiermede voltooid en nu moesten de resultaten nog in cijfers afgedrukt worden. Daarvoor werd gebruik gemaakt van de

tabelleermachine, die, behalve de resultaten tevens de totale kansen per honderdtal en per duizendtal pk van het totale vermogen afdrukte.

De door de machine vervaardigde lijst, welke hierbij gaat, geeft een duidelijk beeld van de kansen voor bepaalde vermogens, terwijl het met de daarin vervatte gegevens tevens mogelijk is een grafiek te maken van het verband tussen de totale vermogens en de aantallen bezettingsuren.

De conclusies ten aanzien van een verantwoorde filtercapaciteit laten wij gaarne over aan de Heren Klaren en Veerman.

De bra.,

De WWr.,